Geometria vectorială – o nouă paradigmă

Matematică - Geometrie

www.enciclopul.ro

1 Geometrie sintetică, metrică, vectorială și analitică – asemănări și diferențe.

În clasa a VI-a am început geometria, mai exact ramura geometriei numită **geometrie sintetică**, prin studiul axiomatic al elementelor fundamentale ale geometriei[puncte, drepte, semidrepte, segmente, unghiuri) precum și al relațiilor dintre aceste elemente[paralelismul, perpendicularitatea, congruența, egalitatea și incluziunea). Odată ce am trecut prin aceste fundamente, am început studiul formelor geometrice – triunghiul. În clasa a VII-a am continuat să studiem formele geometrice – patrulaterele convexe și poligoanele regulate și am început o nouă ramură de studiu – **geometria metrică**, prin calcul de lungimi și rapoarte[relații metrice) și prin calcul de unghiuri și rapoarte unghiulare[relații trigonometrice).

După ce în clasa a VIII-a am studiat geometrie spațială, din clasa a IX-a ne întoarcem la geometria plană, completând cunoștințele de trigonometrie și introducând o ramură a geometriei complet nouă – **geometria vectorială**. În clasa a X-a vom aprofunda **geometria analitică**, prin studiul planului cartezian real și al planului complex.

În cele ce urmează, o scurtă comparație a celor patru tipuri de geometrie menționate mai sus, aplicate în rezolvarea problemelor de geometrie plană:

	Geometrie sintetică	**Geometrie metrică**	**Geometrie vectorială**	**Geometrie analitică**
Obiecte de studiu	Forme geometrice Segmente, semidrepte, drepte Unghiuri plane Puncte remarcabile	Forme geometrice Segmente, semidrepte, drepte Unghiuri plane	Vectori liberi, versori Segmente orientate Vectori de poziție ai punctelor remarcabile	Forme geometrice Puncte, drepte, conice Puncte remarcabile în triunghi și patrulater.

Metode folosite în demonstrații	Congruența elementelor geometrice Proprietățile paralelismului și perpendicularității Proprietățile formelor geometrice specifice Caracteristicile configurațiilor remarcabile.	Calculul rapoartelor de segmente, calculul distanțelor dintre puncte prin teoreme metrice. Calculul măsurilor de unghiuri și lucrul cu rapoartele unghiulare importante[funcții trigonometrice).	Stabilirea relațiilor între vectori, bazate pe proprietățile relației de adunare și înmulțire. Exprimarea vectorilor în funcție de o bază aleasă. Determinarea vectorilor de poziție.	Exprimarea ecuațiilor formelor geometrice din planul euclidian cartezian. Determinarea punctelor de intersecție a două forme. Stabilirea prin calcul a relațiilor de paralelism și perpendicularitate.
Principii fundamentale	Unghiuri în jurul unui punct, suma unghiurilor în poligonul convex, paralelismul și perpendicularitatea dreptelor prin unghiuri. Congruența triunghiurilor și a altor poligoane, rezultate care derivă din congruență. Caracterizări de loc geometric, tipuri speciale de poligoane și proprietăți specifice.	Teorema lui Thales și teoremele derivate; rezultate reciproce și aplicațiile lor pentru a demonstra relații sintetice. Teorema lui Pitagora, relații metrice în triunghiul dreptunghic, extinderea lor în triunghiul oarecare. Definiții, formule și calcule trigonometrice.	Regula Triunghiului, Regula Paralelogramului și metode analitice la adunarea vectorilor liberi. Rapoarte ale segmentelor orientate/vectoriale, scalari înmulțiți cu vectori și aplicații ale acestor operații. Operații neelementare cu vectori, tipuri de produs.	Definiția punctului în sistemul cartezian, ecuația dreptei și a conicelor. Reguli de calcul pentru distanțe și rapoarte. Determinarea punctelor de intersecție între formele geometrice prin sisteme de ecuații. Ecuațiile punctelor și liniilor importante.
Tehnici ajutătoare	Construcții geometrice – paralela, perpendiculara, simetricul, spargeri și lipiri, mijlocul, punctul în raport. Metoda dedublării[metoda redefinirii punctului).	Alegerea unui raport caracteristic[la punctele variabile) și determinarea celorlalte rapoarte. Folosirea identităților trigonometrice.	Alegerea sistemelor de referință în mai multe moduri la vectorii de poziție. Exprimarea vectorilor în funcție de o singură bază.	Alegerea corectă a sistemelor de coordonate[axe, centru) și a coordonatelor punctelor predefinite, fără a leza generalitatea.
Forme de exprimare a teoremelor și rezultatelor	Proprietăți generale ale elementelor geometrice, relații de loc geometric, relații între elemente, concurență, coliniaritate.	Relații între distanțe, perimetre, arii; inegalități. Formule în funcție de unul sau mai multe unghiuri și de cele două funcții fundamentale.	Relații între vectori; inegalități cu modul. Transformări geometrice. Relații cu vectori de poziție ai punctelor remarcabile.	Coordonatele unui punct specific, ecuația unei forme remarcabile. Relații de transformare între două sisteme.

2 Vectorii – elemente geometrice

Definiția 1 (vectorul liber)**.** *Un vector liber* $\overrightarrow{v}$ *este un segment de dreaptă orientat.*

Definiția 2 (punctul de aplicație)**.** *Numim punct de aplicație al unui vector* $\overrightarrow{OA}$*, punctul* O *din care începe să se manifeste vectorul.*

Definiția 3 (direcția vectorului)**.** *Pentru un vector* $\overrightarrow{v}$*, notăm* $\delta\left(\overrightarrow{v}\right)$ *direcția vectorului, care este determinată de dreapta-suport a acestuia,* $d_{\overrightarrow{v}}$*.*

Proprietatea 1 (egalitatea direcțiilor)**.** *Dacă avem doi vectori* $\overrightarrow{u}$ *și* $\overrightarrow{v}$*, astfel încât* $\delta\left(\overrightarrow{u}\right) = \delta\left(\overrightarrow{v}\right)$*, atunci avem că* $d_{\overrightarrow{u}} \mid\mid d_{\overrightarrow{v}}$*.*

Definiția 4 (relația de paralelism)**.** *Spunem că doi vectori sunt paraleli, notat* $\overrightarrow{u} \mid\mid \overrightarrow{v}$*, dacă au aceeași direcție,* $\delta\left(\overrightarrow{u}\right) = \delta\left(\overrightarrow{v}\right)$*.*

Definiția 5 (sensul vectorului)**.** *Pentru un vector* $\overrightarrow{v}$*, cu direcția* $\delta\left(\overrightarrow{v}\right)$*, numim sensul unui vector felul în care se deplasează pe direcția dată. Sensul, notat* $\sigma\left(\overrightarrow{v}\right) \in \{-1; 1\}$*, este o mărime relativă, care este egală cu* 1 *dacă sensul vectorului este același cu cel ales prin convenție și* -1 *dacă sensurile sunt contrare.*

Definiția 6 (relația de paralelism orientat)**.** *Spunem că doi vectori sunt paraleli orientat, notat* $\overrightarrow{u} \uparrow\uparrow \overrightarrow{v}$*, dacă au aceeași direcție,* $\delta\left(\overrightarrow{u}\right) = \delta\left(\overrightarrow{v}\right)$*, și același sens,* $\sigma\left(\overrightarrow{u}\right) = \sigma\left(\overrightarrow{v}\right)$*.*

Definiția 7 (relația de antiparalelism)**.** *Spunem că doi vectori sunt antiparaleli, notat* $\overrightarrow{v} \uparrow\downarrow \overrightarrow{v}$*, dacă au aceeași direcție,* $\delta\left(\overrightarrow{u}\right) = \delta\left(\overrightarrow{v}\right)$*, și sensuri contare,* $\sigma\left(\overrightarrow{u}\right) = -\sigma\left(\overrightarrow{v}\right)$*.*

Proprietatea 2 (simetria relațiilor de paralelism)**.** *Dacă avem un vector* $\overrightarrow{\omega}$*, atunci sunt adevărate următoarele relații:*

a) $\overrightarrow{\omega} \mid\mid \overrightarrow{\omega}$ *și* $\overrightarrow{\omega} \mid\mid \left(-\overrightarrow{\omega}\right)$*;*

b) $\overrightarrow{\omega} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\omega}$*;*

c) $\overrightarrow{\omega} \uparrow\downarrow \left(-\overrightarrow{\omega}\right)$*.*

Definiția 8 (modulul vectorului)**.** *Modulul unui vector* $\overrightarrow{v}$*, notat* $\left|\overrightarrow{v}\right|$*, reprezintă lungimea segmentului orientat determinat de acest vector.*

Proprietatea 3 (relația între modul și lungime)**.** *Dacă* A *și* B *sunt două puncte în planul* $\mathcal{P}$*, iar* $\overrightarrow{AB}$ *este un vector liber, atunci este adevărată relația:*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d\left(A,\, B\right) = AB$$

Definiția 9 (sistemul de referință)**.** *Orice punct O al planului $\mathcal{P}$ pentru care se scriu relații de forma:*

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}=\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OB_k}$$

se numește sistem de referință în raport cu colecțiile de puncte $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ *și* $(B_1,B_2,\ldots,B_m)$*, cu* $n,m\geq 2$*.*

Definiția 10 (vectorul de poziție)**.** *Dacă fixăm punctul O, pentru un punct arbitrar A, numim vectorul de poziție $\overrightarrow{r_A}$, vectorul $\overrightarrow{OA}$. Vectorul de poziție al punctului A se notează $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{OA}$ sau $\overrightarrow{A}$.*

3 Vectorii – transformări geometrice

Observația (vector definit complet). Un vector este complet definit de direcție, sens și modul, fiind date aceste proprietăți, se poate construi vectorul în orice punct din plan.

Definiția 11 (relația de egalitate)**.** *Doi vectori $\overrightarrow{v}$ și $\overrightarrow{u}$ sunt egali, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}$, dacă $\delta\left(\overrightarrow{v}\right)=\delta\left(\overrightarrow{u}\right)$, $\sigma\left(\overrightarrow{v}\right)=\sigma\left(\overrightarrow{u}\right)$ și $|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}|$. Așadar, doi vectori pot fi egali chiar dacă au puncte de aplicație diferite.*

Definiția 12 (translația cu vector)**.** *Se dă $\overrightarrow{v}$ un vector în plan. Definim transformarea geometrică translație $\mathcal{T}$:$\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, pentru care $\mathcal{T}\left(A\right)=A'$ dacă și numai dacă:*

a) $AA' \mid\mid \delta\left(\overrightarrow{v}\right)$;

b) $\sigma\left(\overrightarrow{AA'}\right)=\sigma\left(\overrightarrow{v}\right)$;

c) $AA'=|\overrightarrow{v}|$.

Teorema 1 (rezultatul translației)**.** *Fie $\overrightarrow{v}$ un vector în plan și $\mathcal{T}$ translația corespunzătoare lui. Dacă A este un punct din plan, iar $\mathcal{T}\left(A\right)=A'$, atunci $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AA'}$.*

Demonstrație. Conform definiției, $AA' \mid\mid \overrightarrow{v}$, de unde $\overrightarrow{AA'} \mid\mid \overrightarrow{v}$. De asemenea, $\sigma\left(\overrightarrow{AA'}\right)=\sigma\left(\overrightarrow{v}\right)$, de unde $\overrightarrow{AA'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{v}$. În cele din urmă, $AA'=|\overrightarrow{v}|$, adică $\left|\overrightarrow{AA'}\right|=|\overrightarrow{v}|$, așadar, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{v}$.

Teorema 2 (bijectivitatea translației)**.** *Fie $\overrightarrow{v}$ un vector în plan, și $\mathcal{T}$ translația asociată acestuia. În aceste condiții, funcția $\mathcal{T}$ este bijectivă.*

Demonstrație. Pentru ca o funcție f:$\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ să fie bijectivă, trebuie să îndeplinească simultan următoarele condiții:

a) f să fie injectivă, adică $\forall y\in\operatorname{Im}\left(f\right)$, $\exists!\ x\in\mathbb{A}$, astfel încât $f\left(x\right)=y$;

b) f să fie surjectivă, adică $\forall y \in \mathbb{B}$, $\exists\ x \in \mathbb{A}$, astfel încât $f(x) = y$.

Pentru a demonstra injectivitatea, este suficient să demonstrăm următoarea implicație logică:

$$\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B) \rightarrow A = B$$

Notăm $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B) = C$. Cum $C = \mathcal{T}(A)$, avem $AC \parallel \delta(\overrightarrow{v})$. Analog $BC \parallel \delta(\overrightarrow{v})$, de unde găsim că:

$$AC \parallel BC$$

De unde rezultă că $A - B - C$ coliniare.

Avem de asemenea $\sigma\left(\overrightarrow{AC}\right) = \sigma\left(\overrightarrow{BC}\right)$, de unde B și C sunt pe aceeași semidreaptă determinată de A pe dreapta $\delta(\overrightarrow{v})$. În plus, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, de unde $AC = BC$, așadar $A = B$.

Pentru a demonstra surjectivitatea, este suficient ca pentru fiecare B din plan să construim punctul A pentru care $\mathcal{T}(A) = B$.

Alegem vectorul $\overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v}$, cu translația corespunzătoare $\mathcal{T}'$. Aplicând $\mathcal{T}'$ lui B, obținem $\mathcal{T}'(B) = A$. Justificare: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{v}$, așadar am demonstrat surjectivitatea lui $\mathcal{T}$.

Cum $\mathcal{T}$ este injectivă și surjectivă, $\mathcal{T}$ este bijectivă.

Definiția 13 (suma vectorială)**.** *Dacă avem doi vectori $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$, cu translațiile corespunzătoare $\mathcal{T}_a$ și $\mathcal{T}_b$, numim vectorul sumă, $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, acel vector cu translația corespunzătoare $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_b$.*

Teorema 3 (regula triunghiului)**.** *Dacă avem trei puncte A,B, C în plan, atunci este adevărată relația vectorială:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Demonstrație. Vectorul $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ are translația corespunzătoare $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$. Pentru punctul A, aplicația este:

$$\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(A)) = \mathcal{T}_2(B) = C$$

În același timp, translația $\mathcal{T}'$ este corespunzătoare vectorului $\overrightarrow{AC}$, are aplicația pentru A:

$$\mathcal{T}'(A) = C$$

Cum cele două translații care acționează asupra lui A îl aduc în C, ceea ce înseamnă că $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, rezultă că: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Teorema 4 (regula paralelogramului)**.** *Dacă avem $ABCD$ un paralelogram în plan, atunci avem relația vectorială $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.*

Demonstrație. Cum $AD \parallel BC$ și $AD = BC$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. În aceste condiții avem:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

Dar conform Teoremei 3, avem:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

De unde rezultă relația $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Definiția 14 (produsul vectorului cu scalar)**.** *Dacă avem $k\in\mathbb{R}$ și $\overrightarrow{v}$ un vector cu translația corespunzătoare $\mathcal{T}$. Numim vectorul $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$, acel vector cu translația $\mathcal{T}'$, care pentru fiecare punct A din plan, dacă $\mathcal{T}(A)=A'$ și $\mathcal{T}'(A)=A''$, are proprietățile:*

a) $A-A'-A''$ *sunt coliniare;*

b) Dacă $k>0$*, atunci* $A''\in[AA'$*, dacă* $k<0$*,* $A\in(A'A'')$*, iar dacă* $k=0$*,* $A''=A'$*;*

c) $\frac{AA''}{AA'}=|k|$.

Proprietatea 4 (relațiile dintre vector și produsul său cu scalar)**.** *Fie $k\in\mathbb{R}$ și $\overrightarrow{v}$ un vector plan. Notăm $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$. Atunci, între vectori se stabilesc relațiile:*

a) $\delta(\overrightarrow{v})=\delta(\overrightarrow{u})$*, adică* $\overrightarrow{v}\parallel\overrightarrow{u}$*;*

b) $\sigma(\overrightarrow{v})=\operatorname{sgn}(k)\,\sigma(\overrightarrow{u})$*, unde* $\operatorname{sgn}(k)=\frac{k}{|k|}$ *este funcția semn;*

c) $\overrightarrow{v}\uparrow\uparrow\overrightarrow{u}$*, dacă* $k>0$*, și* $\overrightarrow{v}\uparrow\downarrow\overrightarrow{u}$*, dacă* $k<0$*;*

d) $|\overrightarrow{v}|=|k|\,|\overrightarrow{u}|$.

Proprietatea 5 (proprietățile adunării vectorilor)**.** *Dându-se $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ și $\overrightarrow{c}$ trei vectori în plan, sunt adevărate afirmațiile:*

a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$ *– comutativitate;*

b) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$ *– asociativitate;*

c) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$ *– element neutru;*

d) $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$ *– elementele sunt simetrizabile;*

Proprietatea 6 (proprietățile înmulțirii vectorilor cu scalari)**.** *Dându-se $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ și $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ doi vectori în plan, sunt adevărate afirmațiile:*

a) $k_1 k_2 \overrightarrow{a} = k_2 k_1 \overrightarrow{a}$ – *comutativitatea înmulțirii scalare;*

b) $(k_1 + k_2) \overrightarrow{a} = k_1 \overrightarrow{a} + k_2 \overrightarrow{a}$ – *distributivitatea față de adunarea scalară;*

c) $k_1 \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = k_1 \overrightarrow{a} + k_1 \overrightarrow{b}$ – *distributivitatea față de adunarea vectorială;*

d) $0 \overrightarrow{a} = 0$ – *elementul nul scalar;*

e) $k_1 \overrightarrow{0} = 0$ – *elementul nul vectorial;*

f) $1 \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ – *elementul neutru;*

Definiția 15 (simetria față de un punct)**.** *Fie O un punct fixat în plan. Transformarea $\mathcal{S}:\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se numește simetrie față de punctul O dacă sunt îndeplinite următoarele două proprietăți:*

a) $\mathcal{S}(O) = O$*;*

b) $\mathcal{S}(A) = A' \Rightarrow OA = OA'$ *și* $O - A - A'$ *coliniare.*

Proprietatea 7 (proprietățile simetriei față de un punct)**.** *Fie O un punct fixat în plan și $\mathcal{S}$ simetria corespunzătoare lui. Atunci sunt îndeplinite următoarele proprietăți:*

a) $\mathcal{S}(A) = A' \Longleftrightarrow \mathcal{S}(A') = A$*;*

b) $\mathcal{S}(A) = A' \Longleftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$*;*

c) $\mathcal{S}(A) = A' \Longleftrightarrow \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AO}$*.*

Teorema 5 (bijectivitatea simetriei față de un punct)**.** *Fie O un punct fixat în plan și $\mathcal{S}$ simetria corespunzătoare lui. Atunci funcția $\mathcal{S}:\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ este o funcție bijectivă.*

Demonstrație. Reamintim proprietățile necesare pentru bijectivitate. Pentru ca o funcție $f:\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ să fie bijectivă, trebuie să îndeplinească simultan următoarele condiții:

a) f să fie injectivă, adică $\forall y \in \operatorname{Im}(f)$, $\exists!\, x \in \mathbb{A}$, astfel încât $f(x) = y$;

b) f să fie surjectivă, adică $\forall y \in \mathbb{B}$, $\exists\, x \in \mathbb{A}$, astfel încât $f(x) = y$.

Pentru ca $\mathcal{S}$ să fie injectivă, vom demonstra următoarea implicație logică:

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = C \to A = B$$

Scriem proprietățile vectoriale pentru punctul C în raport cu A:

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$$

Apoi în raport cu B:

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OC}$$

Ceea ce înseamnă că:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

Adică $A = B$.

Pentru ca $\mathcal{S}$ să fie surjectivă, vom demonstra că pentru fiecare punct P' al planului, există un punct P din plan pentru care $\mathcal{S}(P) = P'$. Dacă $P' = O$, alegem $P = O$. Presupunem acum $P \neq O$. Construim vectorul $\overrightarrow{P'P} = 2\overrightarrow{P'O}$. Conform relațiilor vectoriale[înmulțirea cu scalarul -1), $\overrightarrow{PP'} = 2\ \overrightarrow{OP'}$. Acum, din Regula Triunghiului:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP'}$$

De unde:

$$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'}$$

Conform proprietății 7, este adevărată relația $\mathcal{S}(P) = P'$, iar transformarea geometrică este surjectivă.

Înseamnă că funcția $\mathcal{S}$ este simultan injectivă și surjectivă, adică bijectivă.

4 Probleme de geometrie cu enunțuri vectoriale

În cele ce urmează, ne vom ocupa de un set de probleme cu enunțuri exprimate vectorial sau cu transformări geometrice, în ale căror rezolvări vom folosi cunoștințele despre vectori și transformări geometrice discutate anterior. Problemele notate cu asterisc(*) pot fi reținute și aplicate ca rezultate teoretice fără demonstrație în concurs, iar cele notate cu semnul exclamării au un grad sporit de dificultate.

Problema *1. *Fie ΔABC un triunghi în plan și M mijlocul lui (BC). Demonstrați relația vectorială:*

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

***

Soluție. Aplicăm Regula Triunghiului pentru vectorul $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

Vectorul $\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$, de unde putem găsi că:

$$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Aplicăm Regula Triunghiului pentru vectorul $\overrightarrow{BC}$ și găsim că:

$$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Adică:

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Problema *2. *Fie ΔABC un triunghi și G centrul său de greutate. Atunci, este adevărată relația vectorială:*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

***

Indiciu: Alegem mijloacele M, N și P ale laturilor triunghiului și aplicăm relația anterioară. Ținem cont că centrul de greutate se află la intersecția medianelor, la o tremie de bază și două treimi de vârf.

Problema *3. *Fie ΔABC un triunghi și G centrul său de greutate. Atunci, oricare ar fi X un punct ales în plan, este satisfăcută relația vectorială:*

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XG}$$

***

Indiciu: Folosim Regula Triunghiului pentru vectorii $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$ și $\overrightarrow{XC}$, apoi folosim relația anterioară pentru a ajunge la concluzie.

Problema *4. *Fie ΔABC un triunghi și G centrul său de greutate. Triunghiul ΔMNP din plan are același centru de greutate dacă și numai dacă:*

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$$

***

Indiciu: Folosim relația din problema 2 pentru ambele triunghiuri, apoi le scădem și aplicăm Regula Triunghiului.

Problema *5. *Fie ΔABC și ΔMNP două triunghiuri oarecare în plan, cu centrele de greutate G și G'. Atunci, avem relația vectorială:*

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$$

***

Indiciu: Aplicăm relația din problema 3 pentru același punct X și cele două centre de greutate, apoi scădem[vectorial) relațiile și obținem concluzia.

Problema !6. *Dacă* ΔABC *este un triunghi în plan și* I *centrul cercului său înscris, atunci, cu vectori de poziție:*

$$\overrightarrow{I} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}$$

***

Indiciu: Pentru a rezolva problema, avem nevoie de cunoștințe de geometrie analitică:

$$(x_I, y_I) = \frac{a\,(x_A, y_A) + b\,(x_B, y_B) + c\,(x_C, y_C)}{a+b+c}$$

Folosind aceste reguli și alegând ca reper un punct $O\,(x_O = 0,\, y_O = 0)$, vom putea obține relația vectorială.

Problema !7. *Dacă* ΔABC *este un triunghi în plan și* H *ortocentrul triunghiului* ΔABC*, atunci, cu vectori de poziție, este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{H} = \frac{\operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{A} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{B} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{C}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

***

Indiciu: Apelăm din nou la cunoștințele de geometrie analitică, pentru formula lui H:

$$(x_H, y_H) = \frac{\operatorname{tg} A\,(x_A, y_A) + \operatorname{tg} B\,(x_B, y_B) + \operatorname{tg} C\,(x_C, y_C)}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

Folosind aceste reguli și alegând ca reper un punct $O\,(x_O = 0,\, y_O = 0)$, vom putea obține relația vectorială.

Problema !8. *Dacă* ΔABC *este un triunghi în plan și* O *este centrul cercului circumscris* ΔABC*, atunci, cu vectori de poziție, este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{O} = \frac{\sin 2A \cdot \overrightarrow{A} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{B} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{C}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

***

Indiciu: Tot cunoștințele de geometrie analitică sunt cele care ne ajută să rezolvăm problema, mai exact formula lui O:

$$(x_O, y_O) = \frac{\sin 2A \cdot (x_A, y_A) + \sin 2B \cdot (x_B, y_B) + \sin 2C \cdot (x_C, y_C)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

Vom alege $P\,(x_P = 0,\, y_P = 0)$ reper și vom deduce relația vectorială corespunzătoare.

Problema *9. *Dacă* ΔABC *este un triunghi cu* O *centrul cercului său circumscris și* H *ortocentru:*

a) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$*;*

b) $\forall\ X \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} - 2\overrightarrow{XO}$*.*

Relațiile lui Sylvester

Soluție. Vom demonstra întâi punctul b). Fie A_1 mijlocul lui (BC) și $A' = \mathcal{S}_O(A)$. Se observă că $A'BHC$ este paralelogram (relație sintetică cunoscută). Pentru X oarecare, avem:

$$2\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XA'}$$

De asemenea, ținem cont că $A' = \mathcal{S}_{A_1}(H)$:

$$\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 2\overrightarrow{XA_1} = \overrightarrow{XH} + \overrightarrow{XA'}$$

Însumând relațiile obținem:

$$\overrightarrow{XH} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} - 2\overrightarrow{XO}$$

Acum, alegem $X = O$ și obținem relația de la punctul a).

Problema 10. *Numim bimedianele unui patrulater dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse și medianele unui patrulater dreptele care unesc vârfurile patrulaterului cu centrele de greutate ale triunghiurilor formate din celelalte trei vârfuri. Demonstrați că bimedianele și medianele sunt concurente.*

****

Indiciu: Se demonstrează că toate cele șase drepte descrise în problemă trec prin centrul de greutate al patrulaterului, adică acel punct cu relația în vectori de poziție:

$$4\overrightarrow{G} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}$$

Problema 11. *Pe latura* (BC) *a triunghiului* ABC *considerăm punctul* D*, astfel ca* $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$*. Fie* E *mijlocul laturii* (AB)*,* F *mijlocul medianei* (CE) *și* $AC \cap BF = \{M\}$*. Calculați:*

a) Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$*, pentru care* $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AD}$*;*

b) Valoarea lui $y \in \mathbb{R}$*, pentru care* $\overrightarrow{CM} = y\ \overrightarrow{AM}$*.*

Olimpiada Națională Gazeta Matematică 2021, etapa I, Brașov, clasa a IX-a, enunț modificat

Soluție. a) În ΔABD, $E-F-C$ transversală. Aplicăm *Teorema lui Menelaus*:

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}=1$$

Cum (CE) mediană, este adevărată relația:

$$\frac{AE}{EB}=1$$

Și, din relația vectorială $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{EC}$ știm:

$$\frac{BC}{BD}=3$$

Prin urmare, putem extrage că:

$$\frac{DF}{FA}=\frac{1}{3}$$

De unde putem găsi că:

$$\frac{AF}{AD}=\frac{3}{4}$$

Adică:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

b) În ΔECB, verificăm cu Reciproca Teoremei lui Menelaus dacă:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FE}\cdot\frac{EA}{AB}=1$$

Dar avem că:

$$\frac{BD}{DC}=2$$

Și, cum F mijlocul lui (CE):

$$\frac{CF}{FE}=1$$

Iar, cum E mijlocul lui (AB):

$$\frac{EA}{AB}=\frac{1}{2}$$

Prin urmare, obținem cp $D-F-A$ coliniare.

În ΔABC, AD, BM și CE sunt concurente în F. Aplicăm Teorema lui Ceva:

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

Cum E mijlocul lui (AB), este adevărată relația:

$$\frac{AE}{EB} = 1$$

Am demonstrat anterior că:

$$\frac{BD}{DC} = 2$$

Prin urmare avem că:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{1}{2}$$

Adică:

$$\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$$

Problema 12. *Dacă avem un triunghi ΔABC și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$ trei puncte fixate. Notăm $\frac{A_1B}{A_1C} = x$, $\frac{B_1C}{B_1A} = y$ și $\frac{C_1A}{C_1B} = z$. Demonstrați că:*

a) Dacă $x = y = z$, atunci $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$;

b) Dacă $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{C_1B}$, atunci $x = y = z$;

c) Dacă AA_1,BB_1 și CC_1 sunt concurente și este adevărată relația de la punctul anterior, atunci $xy + yz + zx = 3$.

Olimpiada Națională Gazeta Matematică 2021, etapa I, Brașov, clasa a IX-a, enunț modificat

Indicații de rezolvare:

a) Se scrie formula $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{AC}$ și analoagele. Prin însumare și ținând cont că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, se obține concluzia.

b) Exprimăm toți vectorii în funcție de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CA}$, cu scalarii x, y și z. Apoi, folosind $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ și liniar independența vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, obținem o relație din care putem obține concluzia.

c) Folosim punctul b) și Teorema lui Ceva, de unde obținem următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} x = y = z \\ x \cdot x \cdot x = 1 \end{cases}$$

De unde putem calcula că:

$$x = y = z = 1$$

Adică:

$$xy + yz + zx = 1 + 1 + 1 = 3$$